GRUP SCOLAR HENRI COANDA
RM.VALCEA

PROBLEME REZOLVATE

1) Fie $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$. Aratati ca urmatoarea corespondenta : $(x,y)\to x*y=^{def} x^{\ln y}$ este o lege de compozitie pe G si ca $(G,*)$ este grup comutativ

Rezolvare:
Fie $x,y\in G, x*y=x^{\ln y}\rhd 0.$ Cum $x\neq 1, y\neq 1\Rightarrow x^{\ln y}\neq 1\Rightarrow$ "$*$" este lege de compozitie pe G
Verificam axiomele grupului:

G_1) $(x*y)*z=x^{\ln y}*z=(x^{\ln y})^{\ln z}=x^{\ln y\ln z}=x^{\ln(y^{\ln z})}=x*y^{\ln z}=x*(y*z)\Rightarrow$ "$*$" asociativa

G_2) "$*$" admite element neutru $\Leftrightarrow \exists 0\in G$ astfel incat $x*0=0*x=x,\forall x\in G$.

$x*0=x\Leftrightarrow x^{\ln 0}=x\Leftrightarrow \ln 0=1\Rightarrow 0=e\in G$ Deci e este elementul neutru

$e*x=e^{\ln x}=x^{\ln e}=x,\forall x\in G.$

$x*x'=x'*x=e,\forall x\in G$

G_3) $x*x'=e\Leftrightarrow x^{\ln x'}=e\Leftrightarrow \ln x'\ln x=1\Leftrightarrow \ln x'=\dfrac{1}{\ln x}(x\neq 1)\Leftrightarrow x'=e^{\frac{1}{\ln x}}\in G$

G_4) $x*y=x^{\ln y}=y^{\ln x}=y*x,\forall x,y\in\Rightarrow$ "$*$" este comutativ

Deci $(G,*)$ este grup comutativ.

2) Pe Z se defineste legea de compozitie $Z\times Z\to Z,(x,y)\to x\perp y=^{def} x+y-1$. Aratati ca $(Z,\perp)$ este grup abelian

Rezolvare:

G_1) Fie $x,y,z\in Z.$ Avem $(x*y)*z=(x+y-1)*z=x+y+z-1=x*(y*z)\Rightarrow$ "$*$" asociabila

G_2) "$*$" admite element neutru $\Leftrightarrow\exists e\in Z$ astfel incat

$x*e=e*x=x,\forall x\in Z.x*e=x\Leftrightarrow x+e-1=x\Rightarrow e=1\in Z$

G_3) Fie $x\in Z; x$ este simetrizabil $\Leftrightarrow \exists x'\in Z$ astfel incat

$x*x'=x'*x=x,\forall x\in Z, x*x'=e\Leftrightarrow x+x'-1=1\Rightarrow x'=2-x\in Z$ Deci orice element este simetrizabil

G_4) $x*y=x+y-1=y+x-1=y*x,\forall x,y\in Z\Rightarrow$ "$*$" este comutativa

Deci $(Z,*)$ este grup abelian

3) Fie $(G,\bullet)$ un grup cu proprietetea : $(xy)^2=x^2y^2,\quad \forall x,y\in G$. Aratati ce G este grup abelian.

Rezolvare :

$(xy)^2=x^2y^2\Rightarrow xyxy=xxyy\Leftrightarrow x'(xyxy)y'=x'(xxyy)y'\Rightarrow (x'x)(yx)(yy')=(x'x)(xy)(yy')=eyxe$

$=exye\Rightarrow yx=xy,\forall x,y\Rightarrow (G,\bullet)$

Este grup abelian

GRUP SCOLAR HENRI COANDA
RM.VALCEA

PROBLEME REZOLVATE

4) Fie $(G,*)$ un grup si $a \in G$. Aratati ca functiile:

$f : G \to G \qquad f(x) = a * x \quad \forall x \in G$
$g : G \to G \qquad g(x) = x * a \quad \forall x \in G$
sunt bijective

Rezolvare:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow a * x_1 = a * x_2 \Rightarrow a' * a * x_1 = a' * a * x_2 \Rightarrow e * x_1 = e * x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ este injectiva

Fie $y \in G; a * x = y \Rightarrow a' * a * x = a' * y \Rightarrow e * y \Rightarrow x = a' * y \in G$

Avem : $f(x) = f(a' * y) = a * (a' * y) = y \Rightarrow f$ este sujectiva

$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 * a = x_2 * a \Rightarrow x_1 * a * a' = x_2 * a * a' \Rightarrow x_1 * e = x_2 * e \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow g$ este injectiva

Fie $y \in G, x * a = y \Rightarrow x = y * a' \in G, g(x) = g(y * a) = (y * a') * a = y * e = y \Rightarrow g$ Sujectiva

5) Fie $(G,\bullet)$ un grup si e elementu sau neutru . Daca elementele $a, b \in G$ satisfac conditiile: $b^6 = e$ si $ab = b^4 a$ atunci $b^3 = e$ si $ab = ba$

Rezolvare:

$ab = b^4 a \Rightarrow b^4 = aba^{-1}, b^2 = b^2 \; b^6 = b^4 b^4 = aba^{-1}aba^{-1} = ab^2 a^{-1} \Rightarrow b^2 a = ab^2;$

$ab = b^4 a \Rightarrow b^2 ab = b^6 a \Rightarrow b^2 ab = a \Rightarrow ab^2 b = a \Rightarrow ab^3 = a \Rightarrow b^3 = e;$

$b^2 a = ab^2 \Rightarrow b^3 a = bab^2 \Rightarrow a = bab^2 \Rightarrow ab = bab^3 \Rightarrow ab = ba$